ALGÈBRE. — *Une théorie de Cartier-Dieudonné pour les* A-*modules formels*.

Note (*) de **Michiel Hazewinkel**, transmise par M. Jean Dieudonné.

On présente une théorie de classification de type Cartier-Dieudonné pour les A-modules formels qui généralise la théorie developpé par Cartier ([1]) pour les groupes formels.

We present a classification theory for formal A-*modules which generalizes Cartier's classification theory for formal groups* via *their topological groups of curves.*

1. A-MODULES FORMELS. — Soit A un anneau de valuation discrète de corps résiduel k fini à q éléments, $q = p^r$, $p = \mathrm{car}(k)$. Choississons une fois pour toutes une uniformisante π de A. On notera K le corps de fractions de A, qui peut être soit de caractéristique 0 soit de caractéristique $p > 0$. Soit $B \in \mathbf{Alg}_A$, la catégorie des A-algèbres (commutatifs avec 1). Un A-module formel sur B est une loi de groupe formel F sur B (de dimension finie ou infinie) munie d'un homomorphisme d'anneaux $\rho : A \to \mathrm{End}_B(F)$ tel que $\rho_F(a) \equiv a\,X \bmod (\text{degré } 2)$ pour tout $a \in A$.

Si B est sans A-torsion, il existe un vecteur de séries formelles $f(X)$ à coefficients dans $B \otimes_A K$ tel que $f(X) \equiv X \bmod (\text{degré } 2)$, $F(X, Y) = f^{-1}(f(X)+f(Y))$ et $\rho_F(a) = f^{-1}(af(X))$ pour tout $a \in A$. Un tel $f(X)$ est unique et on l'appelle le A-logarithme de (F, ρ_F).

2. LE FONCTEUR W^A ET LE A-MODULE FORMEL $\hat{W}^A$. — Soit $w^A_{q,n}(Z_0, \ldots, Z_n)$ le polynôme $Z_0^{q^n}+\pi Z_1^{q^{n-1}}+\ldots+\pi^n Z_n$ à coefficients dans A, $n = 0, 1, \ldots$ Alors il existe un foncteur unique $W^A : \mathbf{Alg}_A \to \mathbf{Alg}_A$ tel que les polynômes $w^A_{q,n}$ définissent des homomorphismes de A-algèbres fonctoriels $W^A(B) \to B$ et

$$W^A(B) = \{(b_0, b_1, \ldots) \mid b_i \in B\},\ W^A(\Phi)(b_0, b_1, \ldots) = (\Phi(b_0), \Phi(b_1), \ldots)$$

pour B, $\Phi \in \mathbf{Alg}_A$ (comme foncteur en ensembles).

Le foncteur $W^A(-)$ possède un endomorphisme fonctoriel de A-algèbres σ^A et un endomorphisme fonctoriel $\mathbf{v}$ de A-modules tels que $\sigma^A \mathbf{v} = \pi$.

Si B est de caractéristique $p > 0$ on a $\sigma^A(b_0, b_1, \ldots) = (b_0^q, b_1^q, \ldots)$. Les polynômes d'addition de W^A définissent un A-module formel (de dimension infinie) que l'on notera $\hat{W}^A$. On a d'ailleurs un tel foncteur W^F et un A-module formel associé $\hat{W}^F$ pour tout groupe formel de Lubin-Tate tordu ([2]). Le foncteur W^A a aussi été décrit en ([3]).

3. L'OPÉRATEUR $\mathbf{f}_\pi$ ET q-TYPIFICATION. — Soit $\mathbf{FG}^A_B$ la catégorie des A-modules formels sur B. Soit $C(-; B)$ le foncteur qui associe à tout $F \in \mathbf{FG}^A_B$ son groupe topologique des courbes [*voir* ([1])]. Les homomorphismes ρ_F définissent une structure de A-module topologique sur le foncteur $C(-; B)$.

Il existe deux endomorphismes fonctoriels ε_q et $\mathbf{f}_\pi$ de $C(-; B)$ pour tout $B \in \mathbf{Alg}_A$ avec les propriétés suivantes :

(i) ε_q et $\mathbf{f}_\pi$ commutent avec change de base;

(ii) $\varepsilon_q\,\varepsilon_q = \varepsilon_q$ et $\varepsilon_q\,\mathbf{f}_\pi = \mathbf{f}_\pi\,\varepsilon_q$;

(iii) si B est sans A-torsion et $f(X)$ est le A-logarithme de $F \in \mathbf{FG}_B^A$, alors pour toute courbe $\gamma(t) \in C(F; B)$:

$$f(\gamma(t)) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i t^i \quad \to \quad f(\varepsilon_q \gamma(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} x_{q^i} t^{q^i}, f(\mathbf{f}_\pi \gamma(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi x_{qn} t^n.$$

On notera $C_q(F; B)$ l'image de ε_q et les éléments de $C_q(F; B)$ seront appelés courbes q-typiques. Le sous-foncteur $C_q(-; B)$ est stable sous les opérateurs $\mathbf{V}_q : \gamma(t) \to \gamma(t^q)$, $\langle c \rangle : \gamma(t) \to \gamma(ct)$, $\mathbf{f}_\pi$, et les opérateurs $[a]$, $a \in A$, induits par les endomorphismes $\rho_F(a)$ de F.

Entre ces opérateurs on a les relations suivantes :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle b \rangle \mathbf{V}_q = \mathbf{V}_q \langle b^q \rangle, \quad \mathbf{f}_\pi \langle b \rangle = \langle b^q \rangle \mathbf{f}_\pi, \quad \mathbf{f}_\pi \mathbf{V}_q = [\pi], \\ {[a]} \text{ commute avec } \langle b \rangle, \mathbf{V}_q \text{ et } \mathbf{f}_\pi, \quad [1] = \langle 1 \rangle = \mathrm{id}, \\ {[a+b]} = [a]+[b], \quad [ab] = [a][b], \quad [a] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{V}_q^n < \Omega_n(a) > \mathbf{f}_\pi^n, \\ \langle b \rangle + \langle c \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{V}_q^n < r_n(b, c) > \mathbf{f}_\pi^n, \end{array} \right.$$

où les $r_n(b, c)$ sont des polynômes à coefficients dans A déterminés par

$$Z_1^{q^n} + Z_2^{q^n} = \sum_{i=0}^{n} \pi^i r_i(Z_1, Z_2)^{q^{n-i}}$$

et les $\Omega_n(a) \in A$ sont déterminés par les relations $w_{q,n}^A(\Omega_0(a), \ldots, \Omega_n(a)) = a$, pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots$

4. Théorème de représentation. — *Soit* $\gamma_0(t)$ *la courbe* $(t, 0, 0, \ldots)$ *de* $C_q(\hat{W}^A; B)$, *i. e. la première composante de* $\gamma_0(t)$ *est la série formelle* t *et toutes les autres composantes sont zéro. Alors pour toute courbe q-typique* $\gamma(t) \in C_q(F; B)$, $F \in \mathbf{FG}_B^A$ *il existe un homomorphisme unique de* A-*modules formels* $\alpha_\gamma : \hat{W}^A \to F$, *tel que* $\alpha_\gamma(\gamma_0(t)) = \gamma(t)$.

Grâce à ce théorème on peut écrire tout endomorphisme du foncteur $C_q(-; B)$ (comme foncteur en ensembles) sous la forme $\sum \mathbf{V}_q^n < b_{n,m} > \mathbf{f}^m$ où les $b_{n,m}$ sont tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ il n'y a qu'un nombre fini de m tel que $b_{n,m} \neq 0$, et cette expression est unique.

On notera $\mathrm{Cart}_A(B)$ l'algèbre des opérateurs de $C_q(-; B)$. Les relations (1) sont les règles de computation de $\mathrm{Cart}_A(B)$.

5. L'équivalence de catégories. — Soit $\mathbf{E}(A; B)$ la catégorie des $\mathrm{Cart}_A(B)$-modules C tel que les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $\mathbf{V}_q$ est injective, $C/\mathbf{V}_q C$ est un B-module libre (la structure de B-module étant définie par les opérateurs $\langle b \rangle$);

(ii) C est complet et Hausdorff pour la topologie définie par les sous-groupes $\mathbf{V}_q^n C$.

Alors $F \mapsto C_q(F; B)$ est une équivalence de catégories $\mathbf{FG}_B^A \to \mathbf{E}(A; B)$.

6. Hauteur et dimension. — Soit l une extension parfaite du corps résiduel k de A. Soit $F \in \mathbf{FG}_l^A$ de dimension finie et $C = C_q(F; l)$. Alors $C/[\pi]C$ est un espace vectoriel sur l et on définit $h(F) = \dim(C/[\pi]C)$. Si $h < \infty$ on a $h = \dim(F) + \dim_l(C/\mathbf{f}_\pi C)$. Si A est l'anneau des entiers d'une extension finie K du corps p-adique Q_p on a la relation $H = nh$ où H est la hauteur de F comme groupe formel sur A et $n = [K : Q_p]$.

7. DESCRIPTION DE Cart_A (B). — Le sous-ensemble de Cart_A (B) des éléments de la forme $\sum \mathbf{V}_q^n \langle b_n \rangle \mathbf{f}_\pi^n$ est un sous-A-algèbre de Cart_A (B) qui s'identifie avec W^A (B). L'algèbre Cart_A (B) alors consiste de toutes les expressions $x_0+\sum \mathbf{V}_q^i x_i+\sum y_i \mathbf{f}_\pi^i$, $x_i, y_i \in W^A$ (B) avec la seule condition que $\lim_{i \to \infty} y_i = 0$. Si B est un corps parfait W^A (B) est un anneau de valuation discrète de corps résiduel B et uniformisante π. En ce cas les règles de computation de Cart_A (B) sont $\mathbf{f}_\pi x = \sigma^A(x) \mathbf{f}_\pi$, $x \mathbf{V}_q = \mathbf{V}_q \sigma^A(x)$, $\mathbf{f}_\pi \mathbf{V}_q = \pi = \mathbf{V}_q \mathbf{f}_\pi$.

8. CLASSIFICATION A ISOGÉNIE PRÈS. — Soit l une extension séparablement close de k, alors Cart_A (l), « localisé par rapport à $\mathbf{V}_q$ » est un anneau sur lequel on peut classifier les modules de torsion de type fini, comme dans (4). Il en résulte que tout A-module formel sur l est isogène à une somme directe unique des A-modules formels $G_{1,0}^A$, $G_{n,m}^A$, $G_{n,\infty}^A$ avec $n, m \in \mathbf{N}, (n, m) = 1$. Les modules des courbes q-typiques de ces A-modules formels sont les quotients de Cart_A (l) par les idéaux principaux à gauche engendrés par $\mathbf{f}_\pi - 1$, $\mathbf{f}_\pi^n - \mathbf{V}_q^m$, $\mathbf{f}_\pi^n$.

9. Les preuves de tout ce qui précède reposent d'une façon non triviale sur des constructions de A-modules formels universels et on utilise plusieurs fois le « lemme d'équation fonctionnelle » (5).

(*) Séance du 3 janvier 1977.

(1) P. CARTIER, *Comptes rendus*, 265, série A, 1967, p. 50; *Ibid*, p. 129.

(2) M. HAZEWINKEL (preprint).

(3) E. DITTERS, *Notes d'un cours*, Göttingen, 1975.

(4) Yu. MANIN, *Usp. Mat. Nauk*, 18, n° 6, 1963, p. 3-90.

(5) M. HAZEWINKEL, *Formal Groups and Applications* (à paraître) § 2.2 et 10.2; *J. Pure and Appl. Algebra*, *Adv. Math.* et *Compositio Math.* (à paraître).

Department of Mathematics,
Erasmus University,
50, *Burg. Oudlaan,*
Rotterdam,
Hollande.